



Zlatan Magajna

Računalniško podprto dokazovanje v šolski geometriji

Kazalo

Uvod	4
Avtomatsko dokazovanje v GeoGebri	6
Računalniško podprto opazovanje dinamičnih konstrukcij z OK Geometry	8
Avtomatsko dokazovanje s programom Java Geometry Expert (JGEX)	14
G01 Obodni in središčni kot	17
G02 Tangente na krožnico.....	18
G03 Potenca točke na krožnico. Radikalna os.....	19
G04 Tetivni štirikotnik	20
G05 Tangentni štirikotnik	21
G06 Tangentni trikotnik.....	22
G07 Miquelov izrek	23
G08 Johnsonov izrek.....	24
G09 Arbelos	25
G10 Inverzija glede na krožnico.....	26
G11 Peauceliov mehanizem.....	27
G12 Wattov mehanizem in mehanizem Čebiševa.....	28
G13 Harmonična četverka	29
G14 Apolonijeva krožnica	31
G15 Izodinamični točki trikotnika.....	32
G16 Cevov izrek	33
G17 Menelajev izrek.....	34
G18 Uporaba Cevovega in Menelajevega izreka	35
G19a Središči trikotniku očrtane in včrtane krožnice.....	36
G20 Soddyjevi krogi. Izoperimetrična točka.....	37
G21 Kenmotujeva točka in Kenmotujev krog.....	38
G22 Višinska točka.....	39
G23 Težišče	40
G24 Eulerjeva premica	41
G25 Gergonnova točka.....	42

G26 Pričrtane krožnice	43
G27 Nagelova točka.....	44
G28 Fermatova točka	45
G29 Krožnica 9 točk.....	46
G30 Feuerbachov izrek.....	47
G31 Simedianska točka in simediana	48
G32 Simson-Wallaceov izrek	49
G33. Izrek o metulju	50
G34 Izotomična konjugacija	51
G35 Vivianijev izrek	52

Uvod

Pričujoče gradivo je namenjeno bodočim učiteljem matematike, ki se v okviru svojega študija morajo seznaniti z elementarno geometrijo, dokazovanjem v geometriji, pa tudi z uporabo sodobnih orodij pri obravnavi geometrijskih problemov. Orodja, namenjena računalniško podprti izdelavi dinamičnih geometrijskih konstrukcij, so razmeroma dobro poznana in razširjena, orodja namenjena računalniško podprtemu dokazovanju, pa so še predmet razvoja in so v šolskem prostoru tako rekoč nepoznana.

Dokazi in dokazovanje so pomemben del šolske geometrije. Dokazovanje v matematiki je namenjeno predvsem formalni verifikaciji dejstev, v šolski geometriji pa so poudarki pri dokazovanju drugačni. Bolj kot na verifikacijo smo pozorni na razumevanje: torej ni pomembno le to, da je nekaj res, temveč predvsem to, zakaj je res. Poleg tega ni pomembno le poznati dokaz, ampak tudi znati samostojno dokazati ali ovreči neko dejstvo. Ali nam pri tem lahko pomagajo računalniška orodja? Odgovor na to ni enostaven. Zagotovo so računalniški programi dinamične geometrije izjemni pripomočki za predstavitev pojmov in dejstev, omogočajo tudi učinkovite predstavitve idej dokaza. Nejasna in omejena je vloga raznih računalniških programov pri učenju procesov dokazovanja (opazovanje, hipotetiziranje, utemeljevanje), še zahtevnejše pa je povezati dokazovanje dejstev z obstoječo tehnologijo računalniško podprtega dokazovanja. Računalniško podprto dokazovanje namreč (večinoma) temelji na povsem drugačnih temeljih kot klasično (sintetično) dokazovanje v geometriji: geometrijske trditve se namreč prevedejo v algebrski kontekst in obravnavajo z zahtevnimi metodami, ki močno presegajo šolsko matematiko. Poleg tega so rešitve oz. dokazi 'ljudem neberljivi', izvemo le, da je računalniški program trditev dokazal, morda dokazal pri dodatnih pogojih ali da računalnik trditve ni dokazal. Računalniško podprto dokazovanje je zaradi neskladja z razlagalno funkcijo dokaza v šolski matematiki še povsem v povojih. Vsekakor pa lahko predvidimo dve: Prvič, računalniško podprto dokazovanje terja zelo dobro razumevanje pojma (sintetičnega) dokaza in klasičnega dokazovanja. Drugič, računalniško podprto dokazovanje zahteva še posebno poglobljeno razumevanje nekaterih vidikov dokazovanja, npr. potrebnost in zadostnost pogojev.

Gradivo je sestavljeno iz dveh delov. Prvi del tvorijo prosojnice s predstavitvami treh računalniških orodij, povezanih z dokazovanjem v geometriji:

- **GeoGebra** je zelo razširjen program dinamične geometrije. Omogoča izdelavo dinamičnih konstrukcij, za samo dokazovanje pa je pomembna možnost preprostega empiričnega preverjanja opaženih lastnosti z merjenjem in 'vlečenjem' prostih objektov. Najnovejše različice tega programa uvajajo metode formalnega dokazovanja geometrijskih dejstev.
- **OK Geometry** je namenjen avtomatskemu opazovanju dinamičnih geometrijskih konstrukcij, izdelanih v OK Geometry ali v drugih programih dinamične geometrije. Program opozori na številna geometrijska dejstva v geometrijski konstrukciji, zato je posebej uporaben pri hipotetiziranju. Vsebuje tudi obsežno bazo dejstev iz geometrije trikotnikov. Program ne dokazuje dejstev, temveč na osnovi empiričnih izračunov le opozori na veliko verjetnost njihove resničnosti.

- **Java Geometry Expert (JGEX)** je (kljub manjšim nerodnostim v posluževanju) privlačen program za izdelavo preprostih dinamičnih konstrukcij in avtomatsko dokazovanje geometrijskih trditev. Poleg dveh algebraskih metod pozna tudi metodo geometrijske podatkovne baze (GDD), ki (včasih) omogoča izdelavo 'berljivih' dokazov z geometrijskimi argumentacijami.

Drugi del gradiva sestoji iz nalog in izzivov. Z njimi želimo doseči več ciljev:

- študenti naj spoznajo tudi zahtevnejše vidike elementarne geometrije trikotnikov;
- študenti naj pridobijo izkušnje z natančnim formalnim dokazovanjem geometrijskih dejstev bodisi s samostojno izdelavo dokazov bodisi z dodelavo (ilustriranjem, natančno argumentacijo) pridobljenega dokaza;
- študenti naj pridobijo izkušnje z uporabo tehnoloških orodij za predstavitev dokazov in za samo dokazovanje.

Izzivi so izbrani tako, da vsebinsko pokrijejo pomembne vidike geometrije trikotnika. Med izbrane vsebine smo vključili več takih, ki so, primerno prilagojene, primerne za delo z nadarjenimi osnovnošolci. Mnogokrat izzivi niso le naloga, ki jo je potrebno rešiti, temveč mora študent samostojno pridobiti vire in preštudirati vsebino, poiskati zahtevnejši dokaz. Izzivi praviloma obsegajo več točk, ob katerih so ikone, ki študentu svetujejo, s kakšnimi sredstvi naj študent obravnava predstavljen problem:



Študent naj izdela sintetičen dokaz z natančno argumentacijo na dogovorjen način zapisa (odstavčni zapis, dvokolonski zapis, zapis z diagramom poteka). Dokazi nekaterih trditev so razmeroma preprosti in jih v celoti lahko izdela študent sam; nekateri dokazi pa so zahtevni in naj jih študent pridobi iz virov in nato natančno razdela in predstavi.



Poudarjena naj bo uporaba programa dinamične geometrije (npr. GeoGebra), predvsem dinamično spreminjanje konstrukcije, analiziranje in klasificiranje različnih možnosti.



Poudarjena je obravnava geometrijskih mest točk. Najprimernejše orodje za obravnavo je dober program dinamične geometrije (npr. GeoGebra).



Poudarjeno je hipotetiziranje. Študent naj uporabi program za avtomatsko opazovanje dinamične konstrukcije (OK Geometry), pogosto je pomembna analiza točk trikotnika (Triangle centre analysis).



Predlagano je avtomatsko dokazovanje (npr. z GeoGebro ali še raje z JGEX). Študent naj primerja različne pristope. Če JGEX zmore dokaz z metodo GDD, naj študent skuša predelati avtomatsko dobljen dokaz v razumljiv in pregleden zapis.

Zlatan Magajna

Ljubljana, februar 2018

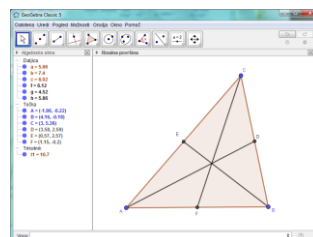
*Avtomatsko dokazovanje v GeoGebri*Geometrijsko dokazovanje v
GeoGebri

Z. Magajna

feb-18

Z. Magajna

Vizualno preverjanje, merjenje

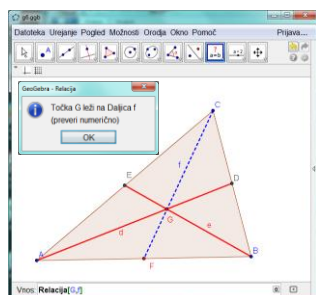


- Opazovanje slike
- **Vlečenje**
- Merjenje

feb-18

Z. Magajna

Numerično preverjanje

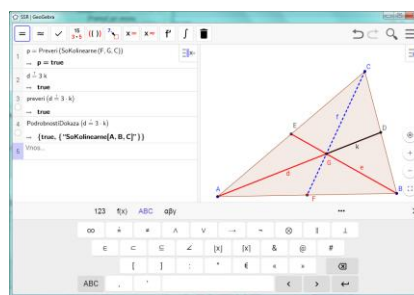


- Točke D,E,F so razpolovišča stranic trikotnika ABC.
- $G = AD \cap BE$
- $f = CF$
- Ali leži G na F?
- **Relacija[G,f]**

feb-18

Z. Magajna

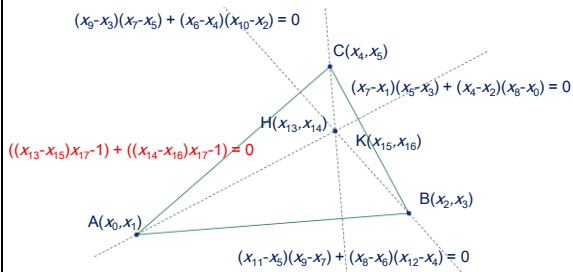
Dokazovanje (težiščnice se tretjinijo)



feb-18

Z. Magajna

Algebrajska metoda



feb-18

Z. Magajna

Algebrajska metoda I
(Wu, 1977; Buchenberg, 1965)

pogoji

- $p_1(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$
- $p_2(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$
-
- $p_n(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$

posledica
 $s(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$

$$s(x_1, x_2, \dots, x_k)^m = r_1(x_1, x_2, \dots, x_k) \cdot p_1(x_1, x_2, \dots, x_k) + \dots + r_n(x_1, x_2, \dots, x_k) \cdot p_n(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

feb-18

Z. Magajna

Algebrajska metoda II
(Wu, 1977; Buchenberg, 1965)

pogoji

- $p_1(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$
- $p_2(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$
-
- $p_n(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$

posledica
 $s(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$

$$q(x_1, x_2, \dots, x_k) \cdot s(x_1, x_2, \dots, x_k) = r_1(x_1, x_2, \dots, x_k) \cdot p_1(x_1, x_2, \dots, x_k) + \dots + r_n(x_1, x_2, \dots, x_k) \cdot p_n(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

feb-18

Z. Magajna

Ukazi za dokazovanje

Ukaza

- Preveri(<relacija>)
- PodrobnostiDokaza(<relacija>)

Primer numerične preverbe

SoKolinearne(A,B,C)

→ s = true

Primer dokaza

Preveri(SoKolinearne(A,B,C))

→ a = true

PodrobnostiDokaza(a)

→ L₁ = {true}

Relacije

- a =? b
- SoKolinearne
- SoKonciklične
- ŠopPremic
- VeljaKongruenca
- Ekvivalenca
- StaPravokotni
- Vzorednost
- Relacija

feb-18

Z. Magajna

Ukazi za dokazovanje

Ukaza

- Prove(<relacija>)
- ProveDetails(<relacija>)

Primer numerične preverbe

AreCollinear(A,B,C)

→ s = true

Primer dokaza

Prove(AreCollinear(A,B,C))

→ a = true

ProveDetails(a)

→ L₁ = {true}

Relacije

- a =? b
- [AreCollinear](#)
- [AreConcurrent](#)
- [AreConcyclic](#)
- [AreCongruent](#)
- [AreEqual](#)
- [ArePerpendicular](#)
- [AreParallel](#)
- Relation

feb-18

Z. Magajna

Primera

- Preverite in dokažite z GeoGebro: *Obodni kot nad premerom krožnice je pravi.*
- Dana je krožnica k in točka T znotraj nje. Skozi točko T potekata dve tetivi krožnice k; AB in CD. Z uporabo GeoGebre **ponazorite** dejstvo, da sta trikotnika ABT in CDT podobna.

feb-18

Z. Magajna

Računalniško podprto opazovanje dinamičnih konstrukcij z OK Geometry

Uvod v OK Geometry

Zlatan Magajna

feb-18

Zlatan Magajna

OK Geometry

Easy

(Basic)

Plus

- Opazovanje konstrukcij iz Cabrija, GeoGebra, Cinderelle, Sketchometry, JGEX
- Izdelava dokazov iz pripravljenih situacij

- Izdelava (zahtevnejših) konstrukcij
- Dokumentiranje hipotez, dokazov

- Specialistična obravnava geometrije trikotnika

- Pripomoček za **opazovanje** dinamičnih konstrukcij
- Pripomoček za **kreiranje** konstrukcij
- Pripomoček za **postavljanje hipotez**
- Pripomoček za urejanje in predstavljanje dokazov
- **Ni program za avtomatsko dokazovanje** izrekov.

feb-18

Zlatan Magajna

Inštalacija programa

OK Geometry je prosto dostopen na

<http://www.z-maga.si>

Za tiskanje in izvoz slik je potrebno inštalirati program **Ghostscript AGPL**, ki je brezplačno dostopen na

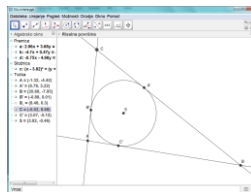
<http://www.ghostscript.com/download/gsdnld.html>

feb-18

Zlatan Magajna

OK Geometry Easy – Opazovanje uvožene konstrukcije

- V programu dinamične geometrije (GeoGebra, Cinderella, Cabri Geometre, Sketchometry, JGEX) izdelamo konstrukcijo.
- Konstrukcijo shranimo in nato opazujemo v OKG.



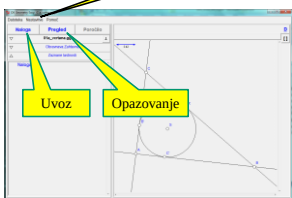
feb-18

Zlatan Magajna

Primer. V GeoGebri smo trikotniku ABC vrtali krožnico. Dotikališča krožnice s stranicami smo označili z A' , B' , C' .

Datoteko smo shranili, npr. v **01_vcrtana.ggb**.

OK Geometry Easy – Opazovanje uvožene konstrukcije



Nastavitve

Uvoz

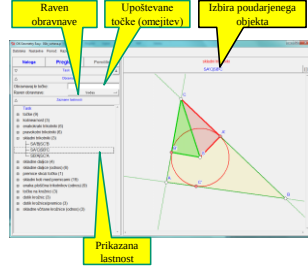
Opazovanje

- V OK Geometry uredimo *Nastavitve (Options)*, izberemo *Način dela Easy* in *Splošne nastavitve (Jezik, Raven obravnave)*
- V OK Geometry Easy preberemo konstrukcijo (*Naloga*).

Primer. Na sliki smo uvozili geometrijsko konstrukcijo **01_vcrtana.ggb**.

feb-18 Zlatan Magajna

OK Geometry Easy – Opazovanje uvožene konstrukcije



Raven obravnave

Upoštewane točke (omejitve)

Izbira poslужjenega objekta

Prikazana lastnost

- Če želimo, izberemo raven obravnave.
- Če želimo, opazovanje omejimo na izbrane točke.
- Zaženemo opazovanje (*Pregled*).
- Izberemo lastnost in relacijo, ki nas zanima.
- Z miško ter s smernimi tipkami lahko izbiramo in prikazujemo dele relacije.

Primer: 01_vcrtana.ggb

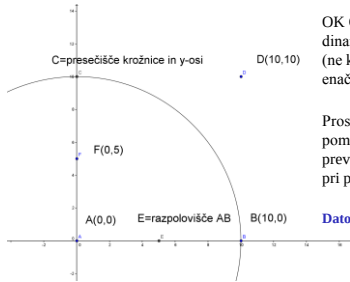
feb-18 Zlatan Magajna

Izdelava konstrukcij v programih dinamične geometrije za analizo v OK Geometry

- Označimo in poimenujemo vse pomembne točke (*ostale oznake niso upoštevane*).
- Zgledi poimenovanja točk: $A, B, C, \dots$
 $A_1, B_2, \dots$
 $A', B', \dots$
 A_1', B_2'
- Previdnost pri presečiščih lomljenk, daljic, lokov. Pri tovrstnih opredelitvah točk **raje uporabljamo premice in krožnice**.

feb-18 Zlatan Magajna

Kako opazuje OK Geometry?



$C = \text{presečišče krožnice in y-osi}$

$D(10,10)$

$F(0,5)$

$A(0,0)$ $E = \text{razpolovišče AB}$ $B(10,0)$

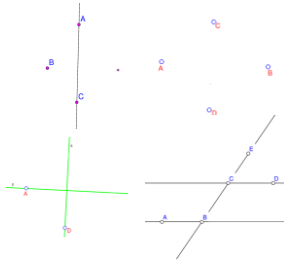
OK Geometry uvozi dinamično konstrukcijo, (ne koordinat točk oz. enačb objektov).

Proste točke avtomatsko pomika in numerično preverja lastnosti, ki se pri pomikanju ohranjajo.

Datoteka: 03_kvadrat.ggb

feb-18 Zlatan Magajna

Kako opazuje OK Geometry?



OKG je pozoren je na

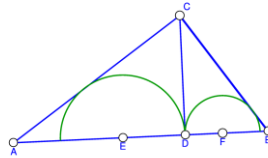
- prikazane objekte,
- objekte, ki so določeni z označenimi in poimenovanimi točkami (torej vse premice skozi pare, vse krožnice skozi trojice takih točk, tudi če ti objekt niso prikazani).

OKG ne loči med kotom in njegovim suplementom.

OKG ne prikazuje načelno trivialnih lastnosti (npr. skladnost kotov med premico in vzporednicami).

feb-18 Zlatan Magajna

OK Geometry Easy – Opazovanje uvožene konstrukcije

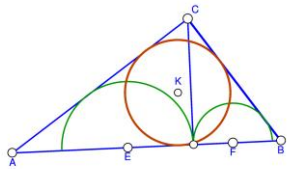


Primer. V pravokotni trikotnik ABC vrtamo trikotnik CD. V nastala pravokotna trikotnika vrtamo polkrožnici. Kaj opaziš?

Datoteka: DM_01.ggb

feb-18 Zlatan Magajna

OK Geometry Easy – Opazovanje uvožene konstrukcije

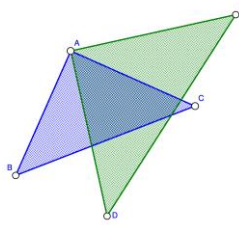


Primer. V pravokotni trikotnik ABC vrtamo krožnico in višino CD. V nastala pravokotna trikotnika vrtamo polkrožnici. Kaj opaziš?

Datoteka: DM_02.ggb

feb-18 Zlatan Magajna

OK Geometry Easy – Opazovanje uvožene konstrukcije



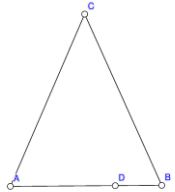
Primer. Enakokraka pravokotna trikotnika ABC in ADE imata prava kota v skupnem oglišču A. Dokaži, da je $|BD| = |CE|$.

Datoteka: DM_03.ggb

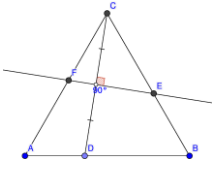
feb-18 Zlatan Magajna

OK Geometry Easy – Opazovanje uvožene konstrukcije

Primer. Na osnovnici enakokrakega trikotnika ABC je točka D. Kaj opaziš? (Datoteka: DM_04.ggb)

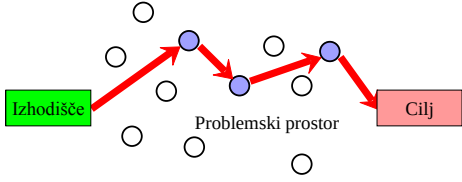


Primer. Naj leži D na stranici AB enakostraničnega trikotnika ABC. Naj bosta E in F presečišči simetrale daljice CD s stranicama BC oz. AC. Ali opaziš kaj zanimivega? (Datoteka: DM_05.ggb, DM_05.p)



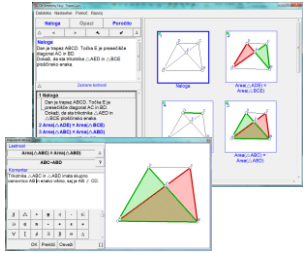
feb-18 Zlatan Magajna

Dokazovanje trditve



feb-18 Zlatan Magajna

OK Geometry Easy- Preprosto dokazovanje pripravljenega primera

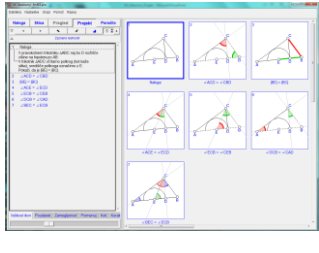


- Sličice uredimo v logični vrstni red (z miško ali tipkama +/-).
- Zapišemo utemeljitve trditev (dvoklik na sličico).
- Izdelamo poročilo (Poročilo).
- Predstavimo poročilo.
- Izdelamo pisno poročilo.

Datoteke:
04_trapez1.ggb
05_trapez1.pro
05_trapez2.pro

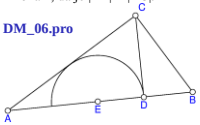
feb-18 Zlatan Magajna

OK Geometry Easy- Preprosto dokazovanje pripravljenega primera



V pravokotnem trikotniku $\triangle ABC$ naj bo D nožišče višine na hipotenuzo AB. V trikotnik $\triangle ADC$ vrtamo polkrog (kot kaže slika), središče polkroga označimo z E. Pokaži, da je $|BE| = |BC|$.

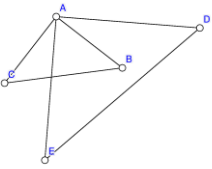
DM_06.pro



feb-18 Zlatan Magajna

OK Geometry Easy-

Preprosto dokazovanje pripravljenega primera



Trikotnika $\triangle ABC$ in $\triangle ADE$ na sliki sta pravokotna in enakokraka.
Pokaži, da je $|BD| = |CE|$.

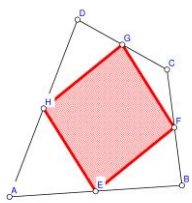
Datoteke:

- 06_trik2a.pro
- 06_trik2b.pro
- 06_trik2c.pro

feb-18 Zlatan Magajna

OK Geometry Easy-

Preprosto dokazovanje pripravljenega primera

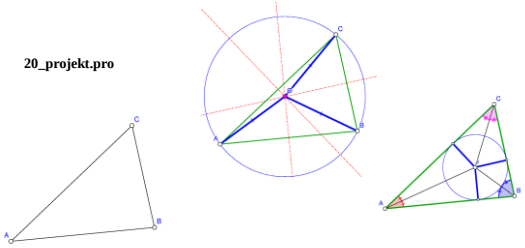


V štrikotniku ABCD označimo z E, F, G, H zaporedna razpolovišča njegovih stranic.
Pokaži, da je štrikotnik EFGH paralelogram.
(Pokaži, da je ploščina štrikotnika EFGH enaka polovici ploščine štrikotnika ABCD.)

Datoteka: DM_08.p
DM_08.pro

feb-18 Zlatan Magajna

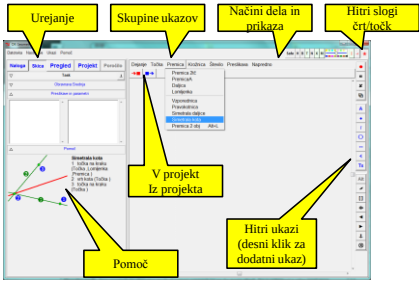
Konstrukcije in projekti



20_projekt.pro

feb-18 Zlatan Magajna

OK Geometry – Izgled vmesnika



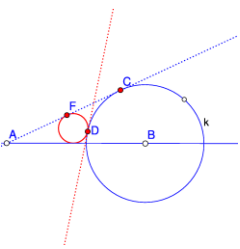
feb-18 Zlatan Magajna

Osnovni hitri ukazi

Safe	Varne točke (daljice/loki so v resnici premice/krožnice)	Alt	Alternativne rešitve
	Spreminjanje sloga objektov		Vlečenje točk
	Skrivanje objektov		Različne velikosti prikazanega območja
	Izbris objektov		Pomik prikazanega območja
	Avtomatsko/ročno ime točke		Preklic/povrnitev ukaza
	Točka; točka kot presečišče		Položaj oznak/kota/teksta
	Premica (2 točki); tang 2 obj		Sprememba določitve objekta
	Krožnica (2 točki; tang 3 obj		
	Daljica; Lomljenk		
	Kot; skladnost (+)		
	Tekst		

feb-18 Zlatan Magajna

OK Geometry – Primer konstrukcije



Dana točka A in krožnica k s središčem v B.
Konstruiraj krožnico, ki se dotika premice AB, krožnice k in tangente iz točke A na krožnico.
Je rešitev več?

Postavi hipotezo, kako konstruirati krožnico z ravnilom in šestilom?

feb-18 Zlatan Magajna

feb-18

Zlatan Magajna

The screenshot displays the AutoCAD environment. On the left, the 'Properties' palette is open, showing the following details:

- Name:** ARC01
- Layer:** 0
- Color:** By Layer
- Linetype:** Standard
- Lineweight:** 0.20 mm
- Plot Style:** Default.ctb
- Material:** None
- Center Point:** (0.0000, 0.0000)
- Radius:** 1.0000
- Start Angle:** 0.0000
- End Angle:** 6.2832
- Start Point:** (0.0000, 0.0000)
- End Point:** (0.0000, 0.0000)
- Object Type:** Arc

The main workspace contains a geometric diagram. It includes a central circle with a radius of 1.0000. Several points are marked around the circle, labeled A through I. Lines connect these points, creating a series of arcs and straight segments. Some points are highlighted with colored triangles (green for A, red for B, blue for C). The diagram appears to be a technical drawing or a mathematical model.

- feb-18

Zlatan Magajna

feb-18

Zlatan Magajna

feb-18

Zlatan Magajna

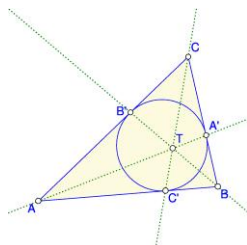
feb-18

Zlatan Magajna

feb-18

Zlatan Magajna

OK Geometry Plus – analiza trikotnika



Trikotniku ABC smo vrtali krožnico. Ta se dotika stranic trikotnika v točkah A' , B' , C' .

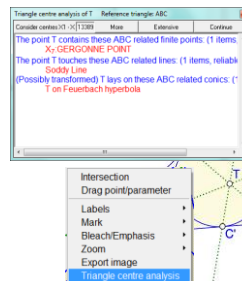
OKG pokaže, da se daljice AA' , BB' , CC' sekajo v skupni točki T.

Za kakšno točko gre?

feb-18

Zlatan Magajna

OK Geometry Plus – analiza trikotnika



feb-18

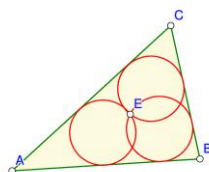
Zlatan Magajna

Z desnim klikom izberemo ukaz *Triangle centre analysis*. Izberemo točko T.

Vpišemo referenčni trikotnik ABC.

Na oknu z opažanji si pojanimo ugotovitve z desnim klikom na točke/izraze.

OK Geometry Plus – analiza trikotnika



V trikotniku ABC poišči tako točko E, da bodo vsi trije krogi, ki se dotikajo dveh stranic trikotnika in potekajo skozi E, skladni.

feb-18

Zlatan Magajna

OK Geometry - (Beta version)

OK Geometry je dostopen na

<http://www.z-maga.si>

Za izvoz slik je potrebno inštalirati **Ghowsript**. Brezplačno je dostopen na

<http://www.ghostscript.com/download/gsdnld.html>

feb-18

Zlatan Magajna

Avtomatsko dokazovanje s programom Java Geometry Expert (JGEX)

Avtomatsko dokazovanje v geometriji s programom JGEX

Zlatan Magajna

feb-18

Zlatan Magajna

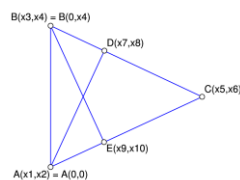
Osnovni načini dokazovanja v JGEX

- Algebrajske metode
- Metode geometrijskih količin (ploščin, kotov)
- Metoda podatkovne baze (GDD)

feb-18

Zlatan Magajna

Algebrajska metoda (ilustracija)



- **Hipoteza.** Imamo enakokrak trikotnik ABC, D je nožišče višine na BC, E je nožišče višine na AC.

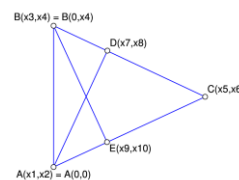
- **Posledica.** $AD \cong BE$.
V konstrukciji zaporedoma dodajamo točke (x_i, y_{i+1}) in generiramo polinomske enačbe, ki jim morajo ustrezati koordinate/spremenljivke.

Tudi dokazovano posledico izrazimo s polinomske enačbo.

feb-18

Zlatan Magajna

Algebrajska metoda (ilustracija)



Hipoteze:

$\triangle ABC$ je enakokrak: $|AC|^2 = |BC|^2$

$$2x^4x^6 - x^4x^2 = 0$$

$$DA \perp BC: AD \cdot BC = 0$$

$$D \in BC: BD \cdot BC = 0$$

$$(x^6 - x^4)x^8 + x^5x^7 = 0$$

$$x^5(x^8 - x^4) + (-x^6 + x^4)x^7 = 0$$

$$EB \perp AC: EB \cdot AC = 0$$

$$E \in AC: AE \cdot AC = 0$$

$$6x^{10} + x^5x^9 - x^4x^6 = 0$$

$$x^5x^{10} - x^6x^9 = 0$$

Posledica:

$$AD \cong BE$$

$$|AD|^2 = |BE|^2$$

$$x^{10}x^2 - 2x^4x^{10} + x^9x^2 - x^8x^2 - x^7x^2 + x^4x^2 = 0$$

feb-18

Zlatan Magajna

Algebrajska metoda I (Wu, 1977; Buchenberg, 1965)

pogoji

- $p_1(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$
- $p_2(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$
-
- $p_n(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$



posledica

$$s(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$$

$$s(x_1, x_2, \dots, x_k)^m =$$

$$r_1(x_1, x_2, \dots, x_k) \cdot p_1(x_1, x_2, \dots, x_k) + \dots + r_n(x_1, x_2, \dots, x_k) \cdot p_n(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

feb-18

Zlatan Magajna

Algebrajska metoda II (Wu, 1977; Buchenberg, 1965)

pogoji

- $p_1(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$
- $p_2(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$
-
- $p_n(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$



posledica

$$s(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$$

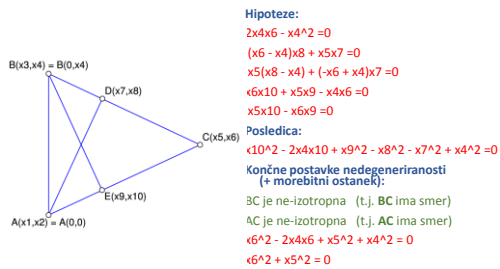
$$q(x_1, x_2, \dots, x_k) \cdot s(x_1, x_2, \dots, x_k) =$$

$$r_1(x_1, x_2, \dots, x_k) \cdot p_1(x_1, x_2, \dots, x_k) + \dots + r_n(x_1, x_2, \dots, x_k) \cdot p_n(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

feb-18

Zlatan Magajna

Algebrajska metoda (ilustracija)



feb-18

Zlatan Magajna

Algebrajska metoda

- Poznanih je več tehnik, vse so konceptualno zahtevne in računsko zelo zahtevne.
- Tudi zelo preprosti geometrijski problemi so lahko za osebne računalnike prezahtevni.
- Najbolj poznani sta Wujeva metoda in metoda z Groebnerjevo bazo.
- Rešitev problema ni enolična (različne postavke nedegeneriranosti).
- Geometrijska interpretacija postavk je lahko zelo zahtevna.
- Tovrstni dokazi so izjemno obsežni algebrski izračuni, ki ne omogočajo geometrijske interpretacije.
- Metoda lahko daje presenetljive rezultate o resničnosti geometrijske trditve, ker se ne zavedamo skritih predpostavk.

feb-18

Zlatan Magajna

Metode količin (metoda kotov, metoda ploščin)

Princip

- Pogoje in posledice izrazimo z običajnimi in umetelnimi geometrijskimi količinami (npr. 'polni koti', orientirane ploščine, 'Pitagorova razlika').
- Iz zaporedja pogojev (konstrukcijskih korakov) zaporedoma izoliramo novo nastopajoče količine.
- Izračunane količine vnesemo v enačbo posledice in preverimo enakost.

Prednosti in slabosti

- Uporabljene geometrijske količine so neobičajne.
- Posamezne metode rešujejo le določene tipe geometrijskih problemov. Ne nujno uspešno.
- Metode omogočajo geometrijsko interpretacijo dokaza. Dobljeni dokaz je lahko nenavaden in dolg.

feb-18

Zlatan Magajna

Metoda podatkovne baze (GDD)

Princip

- Obravnavamo le najosnovnejše geometrijske objekte (točka, premica, krožnica, kot med premicama).
- Metoda izhaja iz sistema privzetih izrekov (lem).
- Iz hipotez o danih točkah metoda generira vse posledice hipotez, ki izhajajo iz privzetih izrekov.

Prednosti in slabosti

- Metoda izdela kolikor toliko berljiv dokaz
- Pogosto je dokaz drugačen od „običajnih postopkov“.
- Metoda (načeloma) ne generira novih točk (objektov) in je lahko neuspešna že v preprostih situacijah.
- Metoda ne dokazuje privzetih izrekov, tako da dokaz lahko vsebuje 'neočita' dejstva.

feb-18

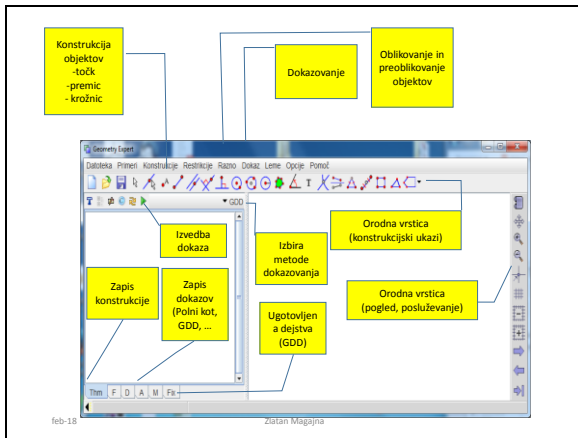
Zlatan Magajna

JGEX (Java Geometry Expert)

- Avtorji: Chou, Gao, Ye (2009)
- Je Java implementacija starejšega sistema EX.
- Je zelo prijazen program, a tehnično nedodelan, 'nedokončan'.
- Izvaja postopke vseh treh vrst metod, omogoča zapis ročnega dokaza.
- Vizualizira postopek dokazovanja.
- Objekti so le točke, premice in krožnice. Daljice, poltraki so le drugače narisane premice.
- Koti pomenijo medsebojno lego premic, torej ne razlikuje med kotom in suplementarnim kotom.

feb-18

Zlatan Magajna



feb-18

Zlatan Magajna

Postopek dokazovanja z JGEX

- Izdelamo konstrukcijo
- Dodelamo podrobnosti (poimenovanja, oblike črt ipd.)
- Določimo dokazovano trditev (Dokaz|Dokazovana lastnost). Lahko jo izberemo v Fix oknu – v tem primeru bo dokazana le z GDD metodo.
- Če je numerična preveritev uspešna, skušamo trditev dokazati avtomatsko z eno ali več metodami. Povsem običajno je, da program izvede dokaz le v kakšni od metod ali celo v nobeni.
- Analiziramo dokaz.

feb-18

Zlatan Magajna

Analiza dokaza

Algebrajske metode (Wu, Groebnerjeva baza)

- Skušamo interpretirati predpostavke (Dokaz|Predpostavke nedegeneriranosti).
- Pri interpretaciji si pomagamo s pomenom spremenljivk (Dokaz|Polinomi).
- Ukaz (Dokaz|All solutions) lahko pomaga razumeti vzrok neuspešnosti alg. Dokazovanja.

Metoda GDD (in metoda kotov)

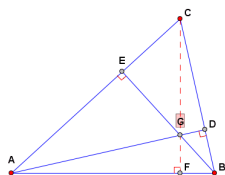
- Če program trditve noče dokazovati: **Izdelano konstrukcijo najprej shranimo v datoteko in jo pred dokazovanjem preberemo.**
- Skušamo razvozlati zapisani dokaz. (Pri tem si lahko pomagamo z lemmami (Leme)).
- Dokaz dodelamo, predelamo in zapišemo v razumljivejši obliki.

feb-18

Zlatan Magajna

Primer. Višine trikotnika se sekajo v skupni točki.

- V trikotniku ABC načrtamo višine AD, BE, CF, kjer so D, E, F nožišča višin. (Želimo dokazati, da se AD, BE in CF sekajo v skupni točki.)
- G opredelimo kot presečišče AD in BE.
- Dokazujemo lastnost: Kolinearnost točk C, G, F.
- Metoda GDD izdelava dokaz v 11 korakih. Uspešni sta tudi algebrski metodi (Wu in GB).

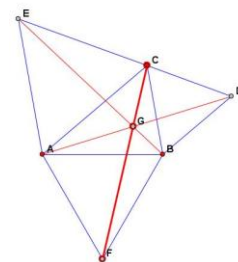


feb-18

Zlatan Magajna

Primer. Fermatova točka

- Nad stranicami trikotnika ABC načrtamo enakostranične trikotnike BCD, CAE, ABF. (Želimo dokazati, da se AD, BE in CF sekajo v skupni točki.)
- G opredelimo kot presečišče AD in BE.
- Dokazujemo lastnost: Kolinearnost točk C, G, F.
- Metoda GDD izdelava dokaz v 10 korakih. Algebrski metodi sta neuspešni. Razlog je ta, da v algebrskih enačbah ni informacije, da so vsi enakostranični trikotniki na zunanji strani referenčnega trikotnika.



feb-18

Zlatan Magajna

G01 Obodni in središčni kot



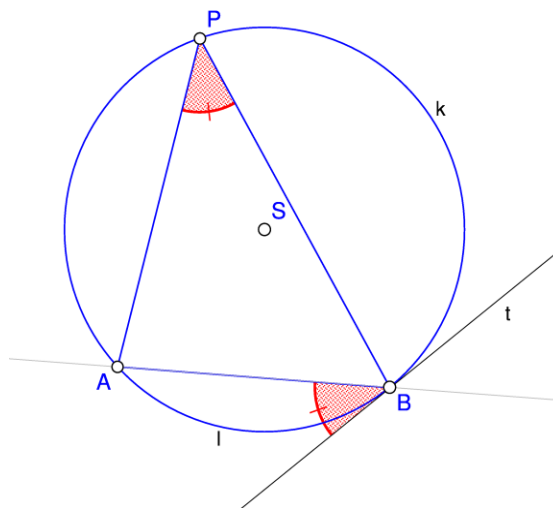
1. Opredelite obodni in središčni kot nad lokom.
Dokažite: središčni kot je dvakratnik obodnega. Navedite posledice te trditve.



2. Obravnavajte problem: Dana je daljica AB in kot α . Kje ležijo točke, iz katerih vidimo daljico AB pod kotom α ? (Utemeljite rešitev.)



3. Na krožnici k imamo lok I s krajiščema AB. Dokažite, da je kot med tetivo AB in tangento t na krožnico k v krajišču tetive skladen obodnemu kotu nad lokom I (Slika 1).



Slika 1

G02 Tangente na krožnico



1. Opredelite, kaj je tangentni odsek točke glede na krožnico.

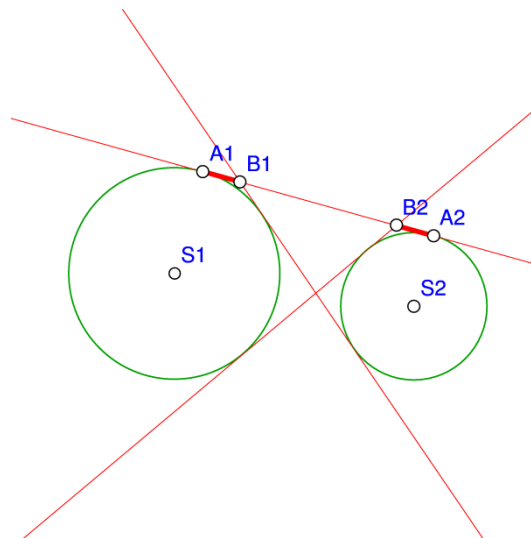
Dokažite: Tangentna odseka iz točke na krožnico sta skladna.



2. Obravnavajte konstrukcijo tangente iz točke na krožnico in konstrukcijo skupnih tangent na dve krožnici. (Predstavite konstrukcijski postopek. Obravnavajte različne možnosti.)



3. Na sliki (Slika 2) so narisane tri od štirih skupnih tangent dveh krožnic. Pokažite, da velja: $|A_1B_1| = |A_2B_2|$.



Slika 2

G03 Potenca točke na krožnico. Radikalna os.

Potenco točke A na krožnico $k(S,r)$ opredelimo kot $|AS|^2 - r^2$.



Radikalna os krožnic k_1 in k_2 je množica točk T v ravnini, za katere se potenci T glede na k_1 in k_2 ujemata.

1. Kako je potenca točke povezana z dolžino tangentnega odseka na krožnico?



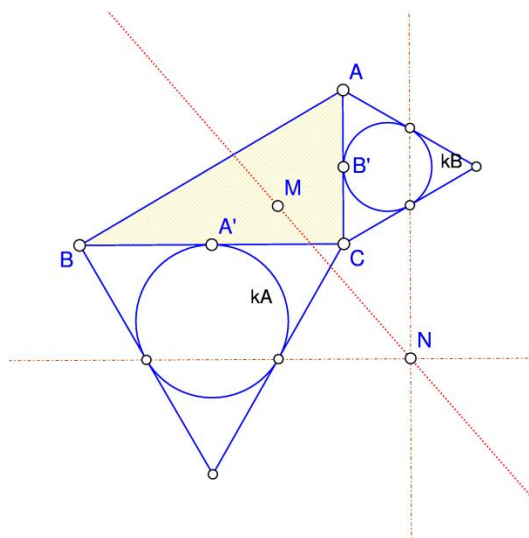
2. Imamo krožnico $k(S,r)$, točko A ter premico p , ki poteka skozi A in seka krožnico k v točkah B in C . Dokažite, da je potenca točke A glede na k enaka $|AB| \cdot |AC|$, če točka leži zunaj krožnice, in je enaka $-|AB| \cdot |AC|$, če točka leži znotraj krožnice.



3. Predstavite konstrukcijo radikalne osi dveh krožnic. Obravnavajte različne primere.
Pravilnost konstrukcije tudi utemeljite.



4. Nad katetama pravokotnega trikotnika ABC načrtamo enakostranična trikotnika in vanju včrtamo krožnici k_A oz. k_B . Krožnici se dotikata katet v točkah A' oz. B' (Slika 3). Preverite, da radikalna os krožnic k_A in k_B poteka skozi razpolovišče M daljice $A'B'$ in skozi presečišče N premic skozi preostali dotikališči krožnic s stranicami enakostraničnih trikotnikov.



Slika 3

G04 Tetivni štirikotnik



- Štirikotnik je **tetiven** (cikličen), če vsa njegova oglišča ležijo na skupni krožnici. Dokažite, da je štirikotnik tetiven, če in samo če sta njegova nasprotna kota suplementarna.



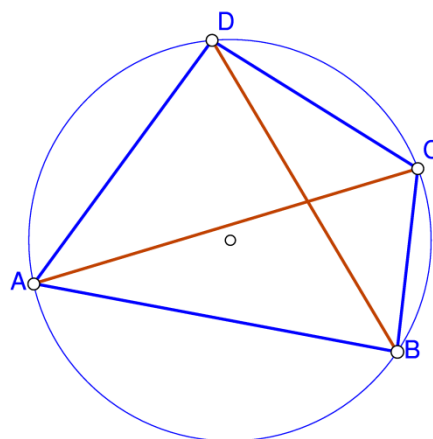
- Predstavite **Ptolemajev izrek** za tetivne štirikotnike (Slika 4): Če je štirikotnik ABCD tetiven, potem velja $|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA| = |AC| \cdot |BD|$. Izrek tudi dokažite. (Opomba. Velja tudi obrat tega izreka.)



xyz



- Naloga: Dan je tetiven štirikotnik ABCD. Po tri njegova oglišča določajo 4 trikotnike. Raziščite lastnosti štirikotnika, katerega oglišča so težišča teh trikotnikov?



Slika 4

G05 Tangentni štirikotnik



1. Štirikotnik je **tangenten**, če je konveksen in se vse njegove stranice dotikajo skupne krožnice. Predstavite in dokažite osnovne značilnosti tangentnih štirikotnikov.



2. **Newtonov izrek** o tangentnih štirikotnikih. Središče tangentnemu štirikotniku včrtane krožnice ter razpolovišči obeh diagonal štirikotnika so kolinearne. (Slika 5) Dokažite ta izrek.



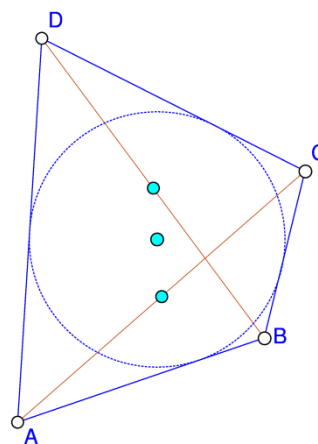
xyz



3. Dan je poljuben tangenten štirikotnik ABCD. Po tri njegova oglišča določajo 4 trikotnike. Obravnavajte štirikotnik, katerega oglišča so težišča teh trikotnikov?



4. Dan je poljuben tangenten štirikotnik ABCD. Po tri njegova oglišča določajo 4 trikotnike. Obravnavajte štirikotnik, katerega oglišča so središča očrtanih krožnic teh trikotnikov?



Slika 5

G06 Tangentni trikotnik

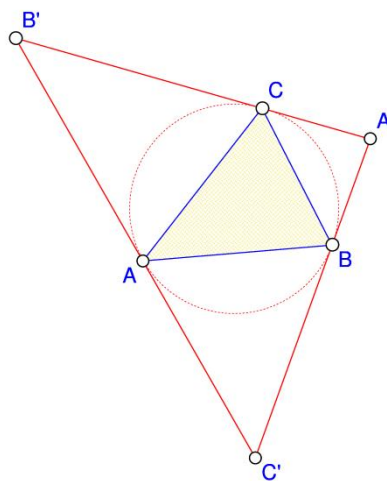


1. **Tangentni trikotnik** referenčnega trikotnika ABC je trikotnik $A'B'C'$, katerega nosilke stranic so tangente na trikotniku ABC očitano krožnico v ogliščih A, B, C (Slika 6). Ali je tangentni trikotnik definiran za vsak trikotnik? Preučite lego tangentnega trikotnika glede na referenčni trikotnik (kdaž je eden v drugem in kdaž ne).



xyz

2. Kako se izražajo notranji koti tangentnega trikotnika s koti referenčnega trikotnika? Ugotovitev utemeljite.
3. Naj bo $A'B'C'$ tangentni trikotnik referenčnega trikotnika ABC . Dokažite, da se zveznice AA', BB', CC' sekajo v skupni točki. Ta točka je pomembna točka trikotnika ABC . Katera?



Slika 6

G07 Miquelov izrek

Miquelov izrek. Dan je trikotnik ABC. Na nosilkah stranic BC, CA, AB so točke A' , B' , C' , ki se ne ujemajo z nobenim od oglišč trikotnika. Tedaj se krožnice, ki so očrtane trikotnikom $AC'B'$, $BA'C'$, $CB'A'$, sekajo v skupni točki D. (Slika 7)

Točki pravimo Miquelova točka, prirejena točkam A' , B' , C' v trikotniku ABC.



Miquelova asociacija. Dan je trikotnik ABC in točka P, ki ne leži na nobeni nosilki stranice. Naj bo A' presečišče premice AP z nosilko BC; B' in C' definiramo ciklično. Miquelova asociacija točke P je Miquelova točka Q, prirejena točkam A' , B' , C' v trikotniku ABC. (Slika 8)



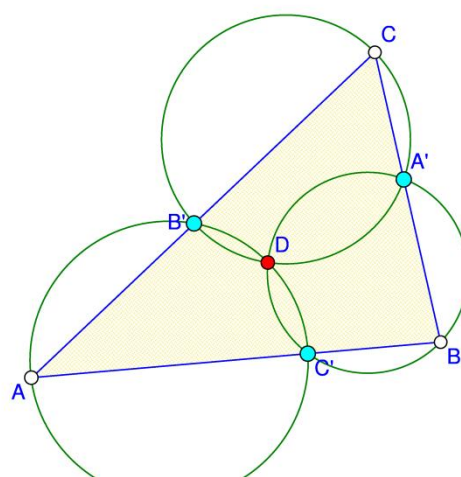
xyz



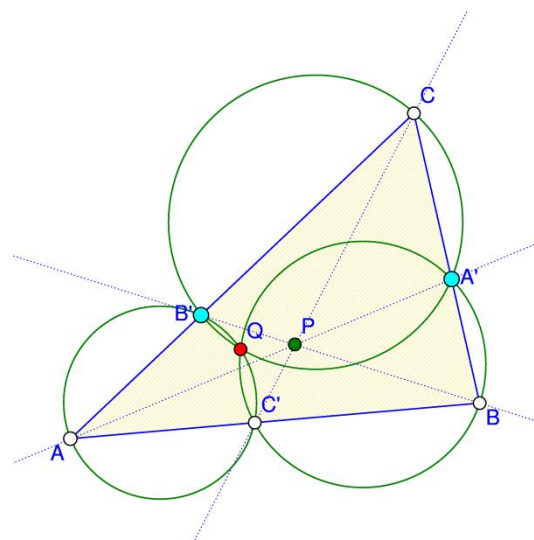
xyz



1. Predstavite Miquelov izrek in ga natančno dokažite. Upoštevajte več možnosti (točke A' , B' , C' lahko ležijo znotraj stranic ali pa ne).
2. Naj bodo A' , B' , C' razpolovišča stranic trikotnika ABC. Raziščite, kaj je njihova Miquelova točka, prirejena točkam A' , B' , C' . Ugotovitev dokažite.
3. Raziščite, ali je za kakšno točko P njena Miquelova asociacija kar sama točka P.
4. Naj bodo A' , B' , C' dotikališča trikotniku ABC včrtane krožnice s stranicami trikotnika ABC. Raziščite, kaj je Miquelova asociacija točk A' , B' , C' .
5. Raziščite, ali Miquelova asociacija preslika premice v premice, krožnice v krožnice, stožnice v stožnice, notranjost trikotnika v notranjost trikotnika.



Slika 7



Slika 8

G08 Johnsonov izrek

Skozi točko P potekajo tri skladne krožnice k_A , k_B , k_C . Po dve in dve krožnici se sekata v točki P in še eni točki: k_B in k_C v točki A' , k_C in k_A v točki B' , k_A in k_B v točki C' . **Johnsonov izrek** trdi, da je krožnica skozi A' , B' , C' skladna krožnicam k_A , k_B , k_C . (Slika 9)



xyz

1. Preverite Johnsonov izrek in ga dokažite.

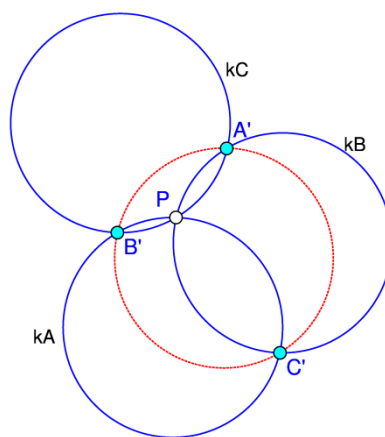


xyz

2. Raziščite lego točke P glede na trikotnik $A'B'C'$. Ugotovitev dokažite.



3. V opisani konfiguraciji dorišite središča A , B , C krožnic k_A , k_B , k_C . Katere zanimive lastnosti opazite?



Slika 9

G09 Arbelos

Na premeru polkroga AB je točka C. Če od polkroga odstranimo polkroga s premerom AC in BC, nastane lik, ki mu pravimo **arbelos** (v grščini to pomeni: čevljarski nož). (Slika 10)



Naj bodo D, E, F središča (pol)krožnic kD, kE, kF s premeri AB, AC, BC. Nadalje naj bo G presečišče kA in pravokotnice na AB skozi C. Označimo z I oz. J presečišče daljic AG oz. BG s polkrožno kE oz. kF. (Slika 11)



xyz

1. Dokažite, da je $|IJ| = |CG|$. (Slika 11)

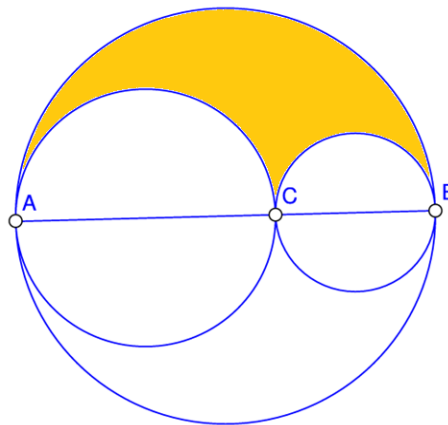


xyz

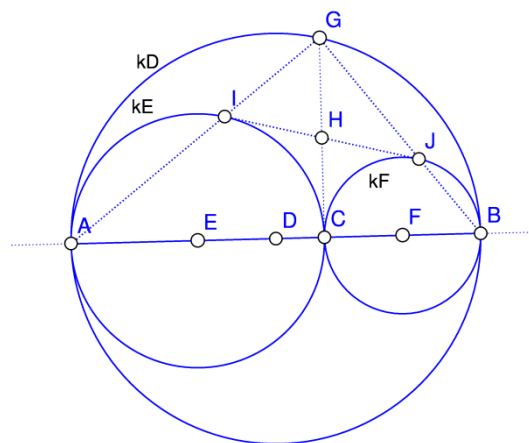
2. Dokažite, da je premica IJ skupna tangenta (pol)krožnic kE in kF.



3. Raziščite konfiguracijo na desni sliki. Katere lastnosti se vam zdijo zanimive?



Slika 10



Slika 11

G10 Inverzija glede na krožnico

Inverzija glede na krožnico $k(O,r)$ je preslikava, ki točko A preslika v točko A' na poltraku OA tako, da velja: $|OA| \cdot |OA'| = r^2$. Inverzijo glede na krožnico $k(O,r)$ označimo z $I(O,r^2)$.

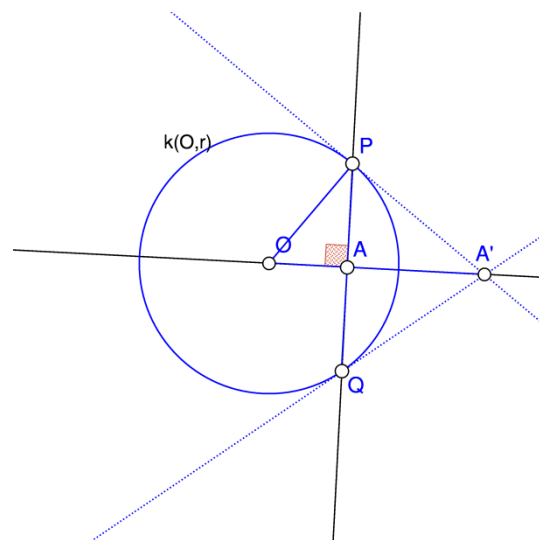
Očitno je inverzija glede na krožnico involucija



xyz



1. **Konstrukcija inverzne točke.** Na sliki (Slika 12) sta premici $A'P$ in $A'Q$ tangentni na krožnico. Dokažite, da je A' slika točke A pri inverziji glede na krožnico k .
2. Za katere točke je inverzija definirana? Katere točke inverzija ohranja?
3. Dokažite, da inverzija $I(O,r^2)$ preslika krožnice skozi središče O v premice. Dokažite, da inverzija $I(O,r^2)$ preslika krožnice, ki ne potekajo skozi O , v krožnice.
4. Raziščite, kako preslika inverzija $I(O,r^2)$ elipse, ki ne potekajo skozi središče krožnice O .



Slika 12

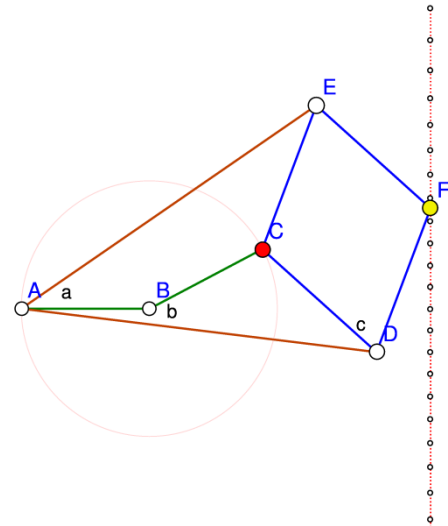
G11 Peauceljarov mehanizem

Peauceljarov palični mehanizem sestoji iz togih palic, kot je prikazano na sliki (Slika 13). Pri tem velja $|AD| = |AE| = a$, $|AB| = |BC| = b$ in $|CE| = |CD| = |FD| = |FE| = c$. V spojih se palice prosto 'vrtijo'.

V mehanizmu sta točki A in B fiksni, točka C se giblje (po krožnici), ostale točke pa se gibljejo, kakor 'narekuje' mehanizem.



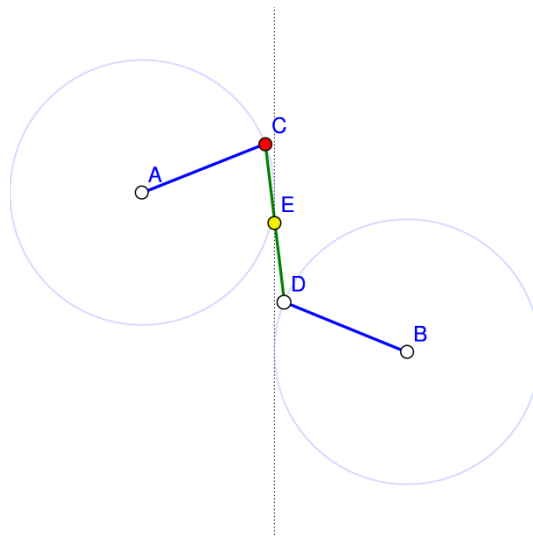
1. Izdelajte simulacijo Peauceljarovega mehanizma v programu dinamične geometrije.
2. Dokažite, da se pri Peauceljarovem mehanizmu točka F pomika po premici. (Dokažite, da je točka F slika točke C pri inverziji $K(A, a^2)$; nato se sklicujte na lastnosti inverzije preko krožnice.)
3. Predstavite zgodovinski pomen Peauceljarovega mehanizma.



Slika 13

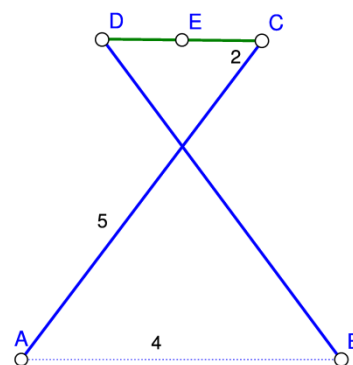
G12 Wattov mehanizem in mehanizem Čebiševa

Wattov mehanizem (Slika 14) tvorita dve palici (AC in BD) dolžine a in ena palica (DE) dolžine $2d$. V spojih se palice prosto 'vrtijo'. Točki A in B sta fiksni, točki C in D pa se gibljeta, kakor 'narekuje' mehanizem. Zaradi enostavnosti naj bosta točki A in B v kartezni ravnini podani z $A(-a, d)$ in $B(a, -d)$. Preučujemo gibanje razpolovišča E palice CD.



Slika 14

Mehanizem Čebiševa (Slika 15) tvorita dve palici (AC in BD) dolžine 5 enot in ena palica (CD) dolžine 2 enoti. Krajišči A in B sta fiksni in sta med seboj oddaljeni 4 enote. V spojih se palice prosto 'vrtijo'. Točki C in D se gibljeta, kakor 'narekuje' mehanizem. Preučujemo gibanje razpolovišča E palice CD.



Slika 15



1. V programu dinamične geometrije izdelajte simulacijo Wattovega mehanizma in simulacijo mehanizma Čebiševa.
2. Preučite gibanje točke E pri Wattovem mehanizmu in mehanizmu Čebiševa. Ugotovitve utemeljite.
3. Predstavite tehnični pomen obeh mehanizmov. Zakaj mehanizma omenjamo pri poučevanju matematike? (Glejte npr. O obeh mehanizmih obstaja veliko literature, kot izhodišče: [http://www.kts.tul.cz/content/files/podklady/06SM.GB Straight line linkages fin 15.pdf](http://www.kts.tul.cz/content/files/podklady/06SM.GB%20Straight%20line%20linkages%20fin%2015.pdf))

G13 Harmonična četverka



Dani sta točki A, B. Točki C, D, ki naj ležita na premici AB, sta **harmonični konjugiranki** glede na točki A, B, če velja: $(AB)/(BC) = - (AD)/(DB)$. Pri tem (AB) označuje orientirano razdaljo med A in B. Pravimo, da točke (A,B; C,D) tvorijo **harmonično četverko**.



1. Pokažite: Če sta C,D harmonični konjugiranki glede na točki A,B, potem sta tudi A,B harmonični konjugiranki glede na C,D.
2. Naj bodo A,B,C,D točke na premici p in P točka, ki ne leži na premici p . Pokažite, da velja:

$$\frac{(AC)}{(CB)} : \frac{(AD)}{(DB)} = \frac{\sin(\angle APC)}{\sin(\angle CPB)} : \frac{\sin(\angle APD)}{\sin(\angle DPB)}$$



Nasvet. Dolžino (AC) izrazite z orientirano ploščino trikotnika APC in $d=d(P,p)$.

Posledica. Središčna projekcija $s_p: p \rightarrow p'$ preslika harmonične četverke v harmonične četverke (Slika 16).

xyz

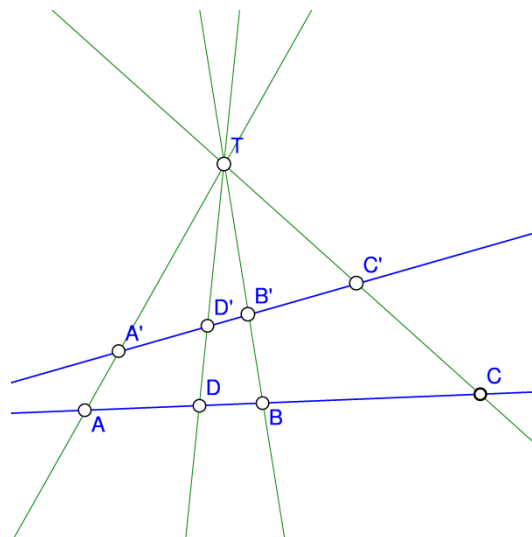


3. Dokažite, da na konfiguraciji na sliki (Slika 17) tvorijo (A,B;C,D) harmonično četverko. (Na sliki je $AP_1 \parallel P_2BP_3$ in $|BP_2|=|BP_3|$.)

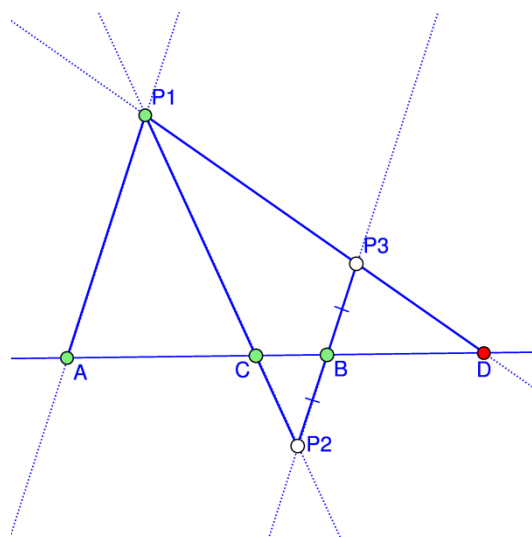


xyz

4. Predstavite 'klasično' konstrukcijo harmonične konjugiranke dane točke C glede na dani točki A,B.



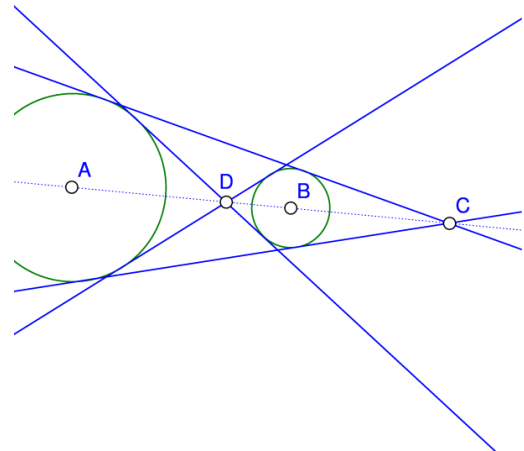
Slika 16



Slika 17



5. Preverite, da presečišči notranjih in zunanjih tangent harmonični konjugiranki glede na središči krožnic (Slika 18).



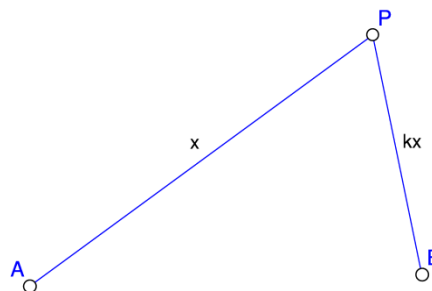
Slika 18

G14 Apolonijeva krožnica

1. V ravnini sta dani točki A, B. Za dano vrednost k ($k \neq 1$) iščemo množico vseh točk P v ravnini, za katere velja $|AP| : |BP| = k$. (Slika 19)



Prikažite iskano množico kot geometrijsko mesto s programom dinamične geometrije (z neposredno uporabo definicije in ukaza Sled/Geometrijsko mesto). Iskana množica točk se imenuje **Apolonijeva krožnica**.

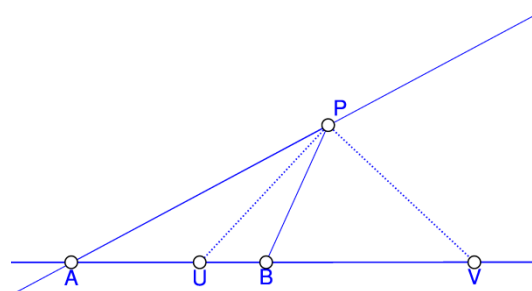


Slika 19

2. Pokažite, da pri danih A, B, k obstajata na premici AB natanko dve različni točki U oz. V, da velja $|AU| : |BU| = k$ in $|AV| : |BV| = k$.



3. (nadaljevanje) Pokažite: Če za točko P, ki ne leži na premici AB, velja, da je $|AP| : |BP| = k$, potem simetrali kota APB oz. njegovega sokota sekata premico AB v točkah U in V (Slika 20). Posledično točka P leži na krožnici s premerom UV.



Slika 20



4. Opišite konstrukcijo Apolonijeve krožnice pri danih A, B, k.

G15 Izodinamični točki trikotnika



1. Dan je referenčni trikotnik ABC. A- Apolonijeva krožnica trikotnika ABC je množica vseh točk P v ravnini, za katere velja $|BP| : |CP| = |BA| : |CA|$. Podobno definiramo B- in C- Apolonijevo krožnico. (Slika 21)

Za dani trikotnik ABC konstruirajte A-, B- in C- Apolonijevo krožnico.



2. Dokažite, da se A-, B- in C- Apolonijeve krožnice sekajo v dveh skupnih točkah. Ti točki imenujemo **prva in druga izodinamična točka** trikotnika.

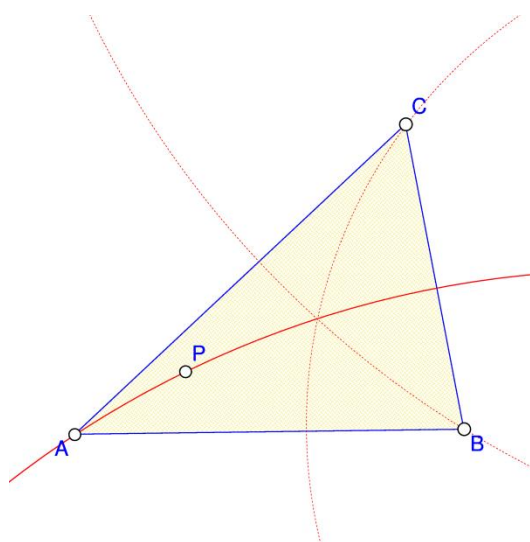


3. V eni od izodinamičnih točk načrtajte tangente na vsako od treh Apolonijevih krožnic. Kaj ugotovite?



xyz

4. Naj bodo A', B', C' projekcije prve (oz. druge) izodinamične točke na nosilke stranic BC, CA, AB referenčnega trikotnika. Preučite lastnosti trikotnika A'B'C'. Ugotovitve tudi dokažite.



Slika 21

G16 Cevov izrek

1. **Cevov izrek.** Dan je trikotnik ABC (Slika 22). Naj bodo A' , B' , C' točke na nosilkah stranic BC, CA, AB, ki ne sovpadajo s katerim od oglišč. Tedaj so premice AA' , BB' , CC' konkurentne (t.j. se sekajo v skupni točki), če in samo če velja:



$$\frac{(BA')}{(A'C)} \cdot \frac{(CB')}{(B'A)} \cdot \frac{(AC')}{(C'A)} = 1.$$

(V zapisu pomenijo izrazi v oklepajih orientirano razdaljo med točkama.)

Preverite veljavnost Cevovega izreka z dinamično konstrukcijo.



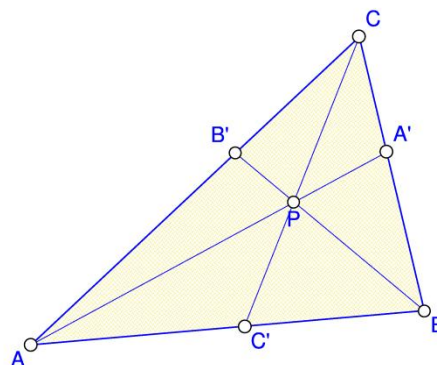
2. Z uporabo Cevovega izreka dokažite, da se težiščnice trikotnika sekajo v skupni točki.



3. Dokažite Cevov izrek. (Obstaja več dokazov tega izreka. Izberite in razdelajte dokaz, ki se vam zdi najprivlačnejši.)



4. Predstavite in izpeljite trigonometrijsko obliko Cevovega izreka.



Slika 22

G17 Menelajev izrek

1. **Menelajev izrek.** Dan je trikotnik ABC (Slika 23). Naj bodo A', B', C' točke na nosilkah stranic BC, CA, AB, ki ne sovpadajo s katerim od oglišč. Tedaj so točke A', B', C' kolinearne, če in samo če velja:



$$\frac{(BA')}{(A'C)} \cdot \frac{(CB')}{(B'A)} \cdot \frac{(AC')}{(C'A)} = -1.$$

(V zapisu pomenijo izrazi v oklepajih orientirano razdaljo med točkama.)

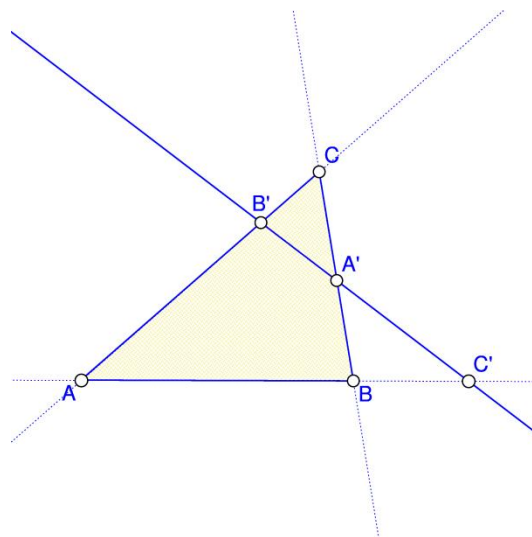
Preverite veljavnost Menelajevskega izreka z dinamično konstrukcijo.



2. Dokažite Menelajev izrek. (Obstaja več dokazov tega izreka. Izberite razdelajte dokaz, ki se vam zdi najprivlačnejši.)



3. Neka premica seka nosilke stranic trikotnika ABC v točkah A' (na BC), B' (na CA), C' (na AB). Na premici BC določimo točko A'' tako, da tvorijo (A, B; A', A'') harmonično četverko. Analogno (ciklično) določimo še B'' in C''. Raziščite odnos med točkami A', B', C', A'', B'', C''. Ugotovitve utemeljite.



Slika 23

G18 Uporaba Cevovega in Menelajevskega izreka



1. Z uporabo Cevovega izreka dokažite, da se nosilke višin trikotnika sekajo v skupni točki.

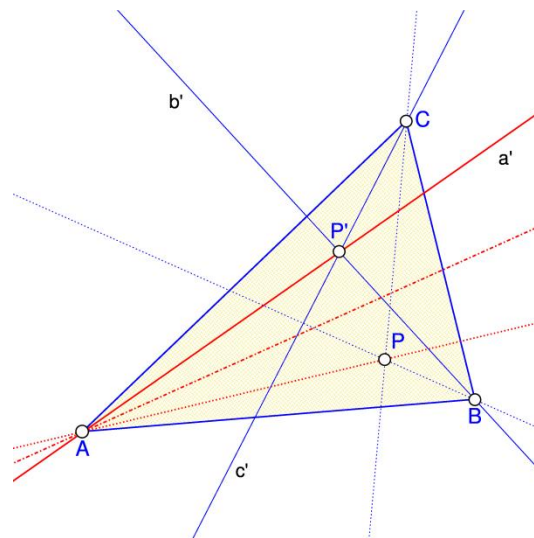


2. Dan je trikotnik ABC in točka P , ki ne leži na nosilki nobene od stranic tega trikotnika. Naj bo a' zrcalna slika premice AP preko simetrale kota A . Podobno (ciklično) definiramo še premice b' in c' (Slika 24). Dokažite, da se premice a' , b' in c' sekajo v skupni točki. (Ti točki pravimo **izogonalna konjugacija** točke P).



xyz

3. Raziščite, kaj je izogonalna konjugacija višinske točke.



Slika 24

G19a Središči trikotniku očrtane in včrtane krožnice



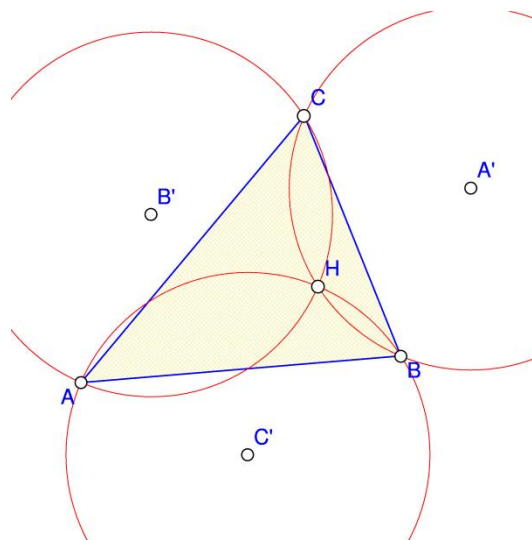
xyz

xyz



xyz

1. Opredelite včrtano krožnico, opišite konstrukcijo včrtane krožnice, izpeljite obrazec za polmer včrtane krožnice.
2. Opredelite očrtano krožnico, opišite konstrukcijo očrtane krožnice, izpeljite obrazec za polmer očrtane krožnice.
3. Naj bodo A' , B' , C' nožišča višin referenčnega trikotnika ABC . Ugotovite lego središča trikotniku $A'B'C'$ včrtane krožnice glede na referenčni trikotnik. Ugotovitev dokažite.
4. Naj bo H višinska točka referenčnega trikotnika ABC . Krožnice, ki jih očrtamo trikotnikom ABH , BCH in CAH , so med seboj skladne in so skladne trikotniku ABC očrtani krožnici. Dokažite.
5. Naj bo H višinska točka referenčnega trikotnika ABC . Naj bodo A' , B' , C' središča krožnic, ki jih očrtamo trikotnikom BCH , CAH in ABH . Raziščite odnos med trikotnikoma ABC in $A'B'C'$? (Kaj lahko poveste o presečiščih premic AA' , BB' , CC').



Slika 25

G20 Soddyjevi krogi. Izoperimetrična točka



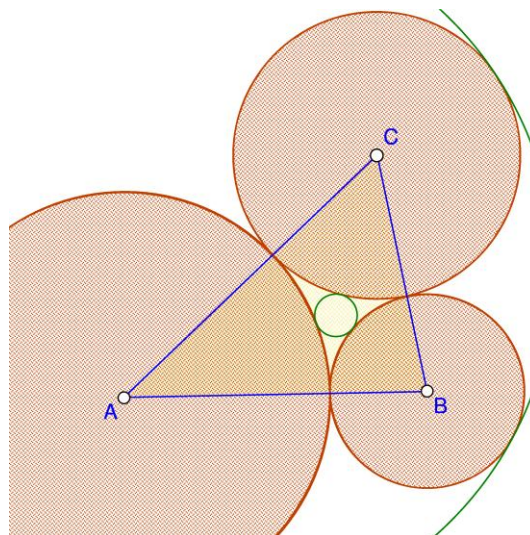
1. **Soddyjevi krogi** trikotnika ABC so trije medsebojno dotikajoči se krogi s središči v A, B in C. Krožnica, ki leži med Soddyjevimi krogi in se jih dotika, se imenuje notranja Soddyjeva krožnica. Krožnica, ki objema vse tri kroge in se jih dotika, pa se imenuje zunanja Soddyjeva krožnica. (Slika 26) Konstruirajte Soddyjeve kroge danega trikotnika. Dokažite pravilnost konstrukcije.



2. Središče notranje Soddyjeve krožnice ima posebno ime – točka enakega obhoda. Pojasnite, od kod to ime in dokažite ugotovljeno lastnost.



3. Raziščite, kaj velja za središče zunanje Soddyjeve krožnice.



Slika 26

G21 Kenmotujeva točka in Kenmotujev krog

1. Opredelite Kenmotujevo točko in Kenmotujevo krožnico.



2. Iz poznane Kenmotujeve točke konstruirajte Kenmotujevo krožnico (in kvadrate). Konstrukcijo utemeljite.



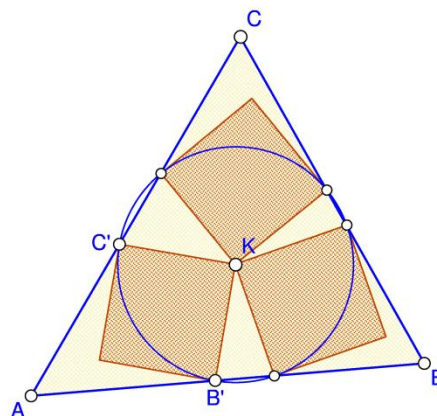
3. Naj bo $B'C'$ diagonala kvadrata ob oglišču A v Kenmotujevi konstrukciji (Slika 27). Preučite lastnosti trikotnika $AB'C'$ in predlagajte konstrukcijski postopek za določitev Kenmotujeve točke. Dokažite pravilnost predlaganega postopka.



xyz



4. Poizvedite in opišite, kako konstruiramo Kenmotujevo točko z Lucasovimi krogi in Lucasovim središčnim trikotnikom.



Slika 27

G22 Višinska točka



1. Opredelite višinsko točko. Dokažite na dva načina, da se v vsakem trikotniku nosilke višin sekajo v skupni točki. En dokaz naj temelji na uporabi Cevovega izreka, drugi pa ne.



2. Obravnavajte lego višinske točke trikotnika (Kdaj leži višinska točka znotraj, na robu, zunaj trikotnika?).



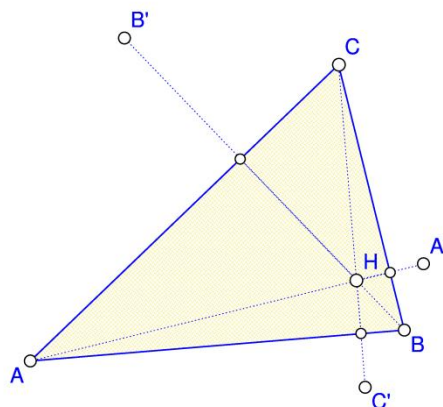
xyz



3. Nožišča višin referenčnega trikotnika ABC označimo z A' , B' , C' . Raziščite odnos med trikotnikom $A'B'C'$ in tangentnim trikotnikom referenčnega trikotnika ABC .



4. Dan je referenčni trikotnik ABC in H njegova višinska točka. Naj bo A' slika točke H pri zrcaljenju preko nosilke stranice BC . Točki B' in C' definiramo ciklično. (Slika 28) Kaj lahko poveste o trikotniku $A'B'C'$?



Slika 28

G23 Težišče

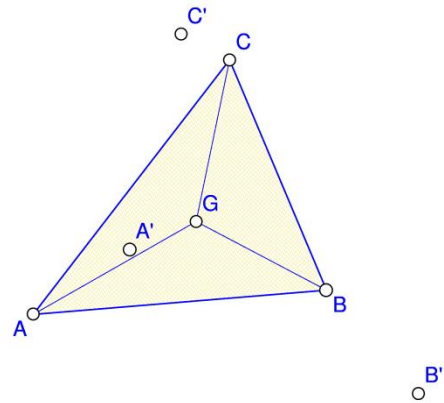


1. S Cevovim izrekom dokažite, da se težiščnice sekajo v skupni točki (težišču). Dokažite na še dva drugačna načina, da se težiščnice sekajo v skupni točki in da se tretjinijo Primerjajte dokaze med seboj.



xyz

2. Naj bo G težišče referenčnega trikotnika ABC . Označimo z A' višinsko točko trikotnika BCG . Točki B' in C' definiramo ciklično (Slika 29). Kaj je težišče trikotnika $A'B'C'$ (glede na referenčni trikotnik ABC)?



Slika 29

G24 Eulerjeva premica



1. Dokažite, da v poljubnem trikotniku ležijo središče očrtane krožnice O , višinska točka H in težišče G točke na isti premici (imenovani Eulerjeva premica) in da velja: $|GH| = 2 \cdot |OG|$.



xyz

2. Naj bodo A' , B' , C' razpolovišča stranic referenčnega trikotnika ABC (A' leži na BC ipd.). Dokažite, da je Eulerjeva premica trikotnika ABC tudi Eulerjeva premica trikotnika $A'B'C'$.



xyz

3. Naj bo H višinska točka trikotnika ABC . Preverite, da se Eulerjeve premice trikotnikov ABH , BCH in CAH sekajo v skupni točki. Katera je ta točka?

G25 Gergonnova točka



1. Dotikališča trikotniku ABC včrtane krožnice s stranicami BC, CA, AB naj bodo A' , B' , C' . Dokažite, da se zveznice AA' , BB' , CC' sekajo v skupni točki G. Opisani točki G pravimo **Gergonnova točka**, trikotniku $A'B'C'$ pa **kontaktni trikotnik** referenčnega trikotnika ABC (Slika 30).

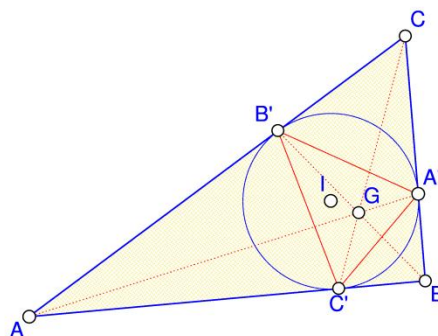


xyz

2. Naj bo ABC referenčni trikotnik, $A'B'C'$ njegov medialni trikotnik, $A''B''C''$ pa kontaktni trikotnik medialnega trikotnika. Raziščite, v kakšnem odnosu sta trikotnika ABC in $A''B''C''$.



3. Preverite, da se Gergonnova točka trikotnika ABC nahaja na stožnici, ki poteka skozi oglišča A, B, C ter višinsko točko in središčem trikotniku ABC včrtane krožnice.



Slika 30

G26 Pričrtane krožnice



1. Krožnici, ki leži zunaj referenčnega trikotnika ABC in se dotika stranice BC ter nosilk stranic CA in AB, pravimo **A-pričrtana** krožnica. Vsak trikotnik ima tri pričrtane krožnice.

Naj bo A' (oz. B' , C') središče A- (oz. B-, C-) pričrtane krožnice. Trikotniku $A'B'C'$ pravimo **izvensrediščni trikotnik** referenčnega trikotnika ABC. (Slika 31)

Danemu trikotniku konstruirajte pričrtane krožnice. Konstrukcijo tudi utemeljite.



2. Izpeljite obrazec za polmere pričrtanih krožnic.



xyz

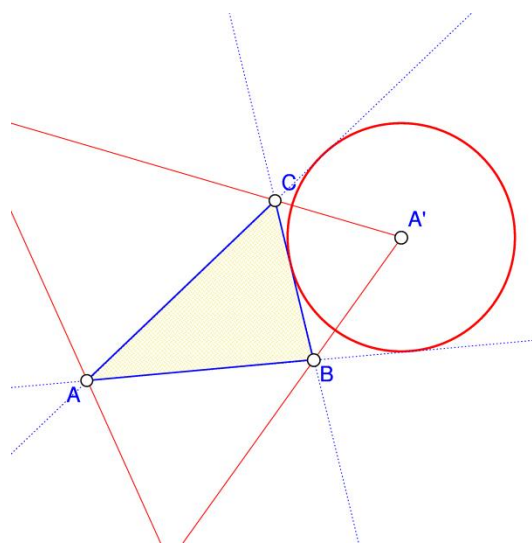
3. Raziščite, v kakšnem odnosu sta referenčni trikotnik in tangenti trikotnik njegovega zunajsrediščnega trikotnika.



xyz



4. Naj bo $A'B'C'$ zunajsrediščni trikotnik referenčnega trikotniku ABC. Naj bo A'' (oz. B'' , C'') razpolovišče daljice IA' (oz. IB' , IC'), pri čemer je točka I središče trikotniku ABC včrtane krožnice. Raziščite značilnosti trikotnika $A''B''C''$.



Slika 31

G27 Nagelova točka

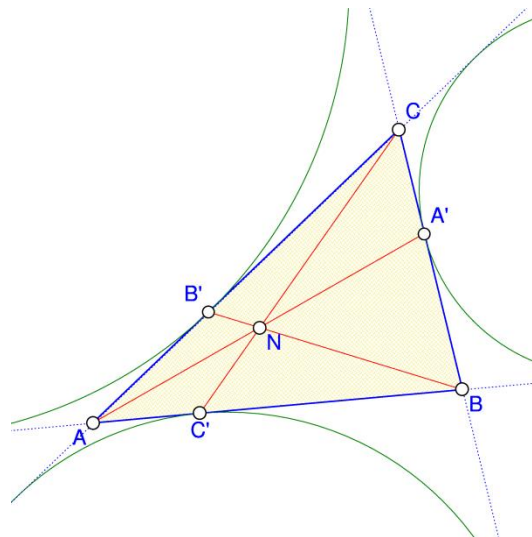


1. Dan je referenčni trikotnik ABC . Naj bodo A' , B' , C' dotikališča referenčnemu trikotniku A -, B -, C -pričrtanih krožnic s stranicami trikotnika. Dokažite, da se zveznice AA' , BB' , CC' sekajo v skupni točki N .

Opisani točki N pravimo **Nagelova točka**, trikotniku $A'B'C'$ pa **pričrtni trikotnik** referenčnega trikotnika ABC (Slika 32).



2. V referenčnem trikotniku ABC naj bo A' dotikališče A -pričrtane krožnice s stranico BC , točka A'' pa razpolovišče višine iz oglišča A . Točke B' , B'' , C' , C'' definiramo ciklično. V kakšnem odnosu sta trikotnik $A''B''C''$ in pričrtni trikotnik $A'B'C'$?



Slika 32

G28 Fermatova točka



1. Dan je referenčni trikotnik ABC. Nad stranico BC načrtamo enakostranični trikotnik BCA' . Točki B' in C' konstruiramo ciklično. Dokažite, da se premice AA' , BB' , CC' sekajo v skupni točki F (Slika 33).

Točki F pravimo (prva) **izogonska točka** trikotnika ABC. Pojasnite, od kod tako ime.



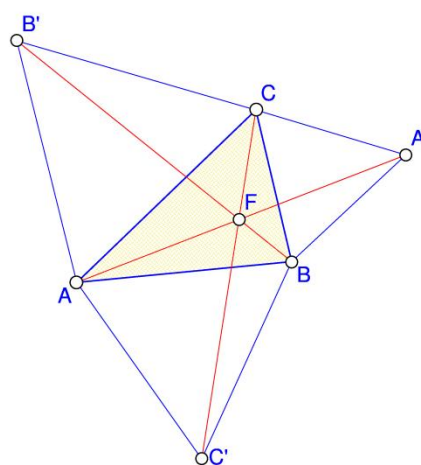
2. Dan je trikotnik ABC. Točki v ravnini z najmanjšo vsoto oddaljenosti do oglišč trikotnika ABC pravimo **Fermatova točka** trikotnika. Dokažite: Če v trikotniku noben kot ne presega 120 stopinj, je Fermatova točka trikotnika kar izogonska točka trikotnika.



3. Raziščite konstrukcijo, analogno konstrukciji iz točke 1, le da enakostranične trikotnike načrtamo proti notranjosti referenčnega trikotnika.



4. Pet različnih točk v ravnini enolično določa stožnico, ki poteka skozi nje. Za dani referenčni trikotnik ABC konstruirajte stožnico, ki poteka skozi oglišča A, B, C , višinsko točko H in težišče G referenčnega trikotnika. Preverite, ali izogonska točka F leži na tej stožnici.



Slika 33

G29 Krožnica 9 točk

1. Dan je referenčni trikotnik ABC. Krožnici, ki poteka skozi razpolovišča A' , B' , C' stranic BC, CA, AB, pravimo **krožnica 9 točk**.



Naj bo H višinska točka trikotnika ABC, točka A_1 naj bo nožišče višine iz oglišča A, točka A_2 pa naj bo razpolovišče daljice AH. Točka B_1, B_2, C_1, C_2 definiramo ciklično. (Slika 34)

Dokažite, da je $A'B'A_2B_2$ pravokotnik. Prav tako je tudi $A'C'A_2C_2'$ pravokotnik.

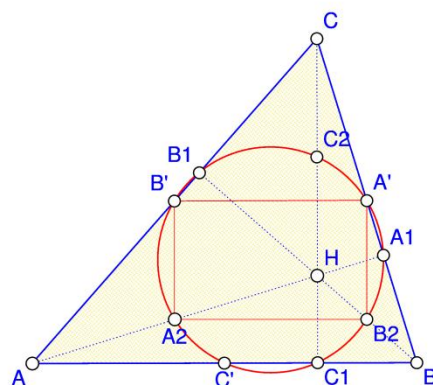
Dokažite, da točke $A', B', C', A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ ležijo na skupni krožnici.



2. Raziščite, kje leži središče krožnice 9 točk glede na druge znamenite točke referenčnega trikotnika in kolikšen je polmer krožnice 9 točk. Ugotovitve dokažite..



3. Naj bo N središče krožnice 9 točk. Naj bodo A', B', C' zrcalne slike točke N preko stranic BC, CA, AB. Raziščite lego središča trikotniku $A'B'C'$ očrtane krožnice glede na referenčni trikotnik ABC.



Slika 34

G30 Feuerbachov izrek



1. **Feuerbachov izrek.** Krožnica 9 točk se dotika trikotniku včrtane krožnice in vseh treh pričrtanih krožnic. Dotikališče F krožnice 9 točk in včrtane krožnice se imenuje **Feuerbachova točka** trikotnika. Dotikališča A' , B' , C' krožnice 9 točk z A -, B -, C - pričrtanimi krožnicami trikotnika so oglišča **Feuerbachovega trikotnika**. (Slika 35)

Ponazorite Feuerbachov izrek s konstrukcijo.



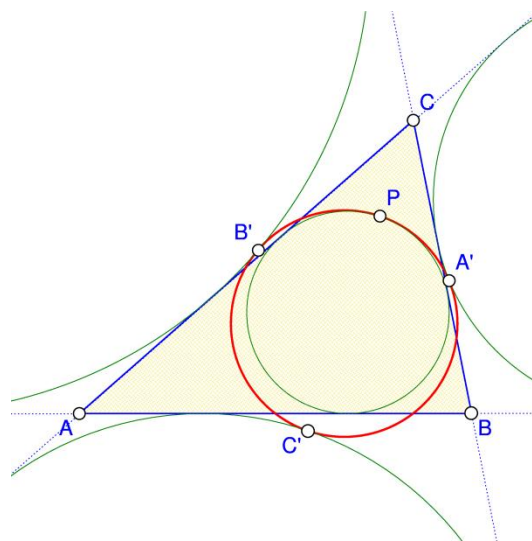
2. Naj bo H višinska točka referenčnega trikotnika ABC . Dokažite, da se krožnica 9 točk trikotnika ABC dotika krožnice 9 točk trikotnika BCH .



3. Krožnici 9 točk referenčnega trikotnika ABC očrtamo trikotnik $A'B'C'$, ki ima stranice paroma vzporedne danemu trikotniku. Preverite, da se premice AA' , BB' , CC' sekajo v skupni točki. Katera je ta točka?



4. Dan je referenčni trikotnik ABC . Naj bo A'' presečišče simetrale kota A s stranico BC . Točki B'' in C'' definiramo ciklično. Preveri, da sta trikotnika $A''B''C''$ in Feuerbachov trikotnik $A'B'C'$ referenčnega trikotnika ABC perspektivna (t.j. da se premice $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ sekajo v skupni točki). Kaj je središče perspektivnosti?



Slika 35

G31 Simedianska točka in simediana



1. **Simediana** je daljica, ki povezuje oglišče trikotnika z nasprotno stranico, pri čemer je nosilka te daljice zrcalna slika nosilke težiščnice glede na simetralo kota v danem oglišču.

Dokažite, da se simediane trikotnika sekajo v skupni točki; ti točki pravimo simedianska točka trikotnika.



xyz



2. Raziščite lego simedianske točke v pravokotnih trikotnikih. Ugotovitev dokažite.



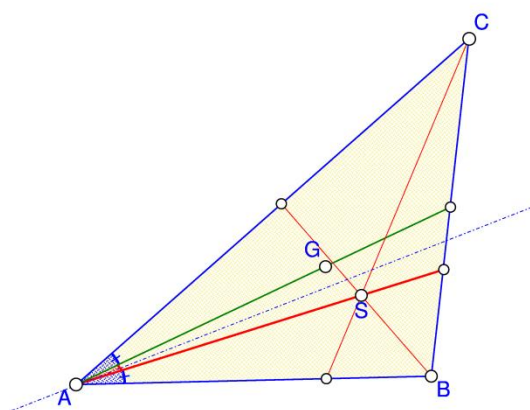
xyz

3. Naj bo $A'B'C'$ tangentni trikotnik referenčnega trikotnika ABC . Pokažite, da se AA' , BB' in CC' sekajo v skupni točki. Katera je ta točka? Ugotovitev dokažite.



xyz

4. Trikotniku ABC očrtamo krožnico k . Nosilka težiščnice iz oglišča C seka krožnico k v točki P , nosilka simediane iz oglišča C pa v točki Q . Dokažite, da je premica PQ vzporedna stranici AB .

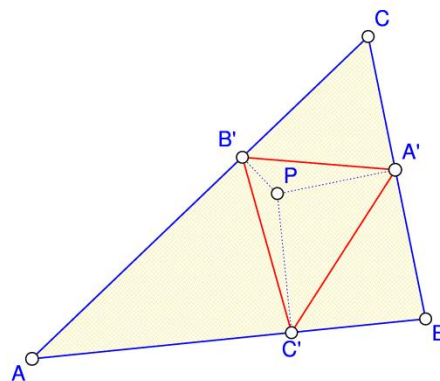


G32 Simson-Wallaceov izrek



1. Dan je referenčni trikotnik ABC in točka P . Naj bodo A' , B' , C' pravokotne projekcije točke P na nosilke stranic BC , CA , AB trikotnika ABC . Trikotniku $A'B'C'$ pravimo **nožiščni trikotnik** točke P glede na referenčni trikotnik ABC . (Slika 36)

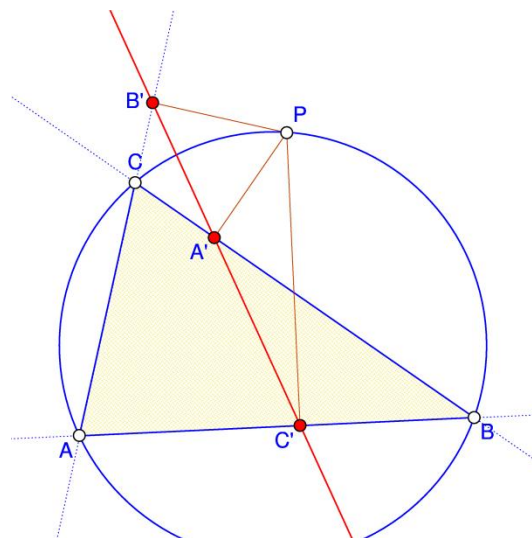
Ponazorite nožiščne trikotnike osnovnih znamenitih točk trikotnika.



Slika 36



2. **Simson-Wallaceov izrek.** Nožiščni trikotnik točke P je izrojen, če in samo če leži točka P na krožnici, ki je očrtana referenčnemu trikotniku. (Slika 37) Dokažite ta izrek (s pomočjo Menelajevskega izreka ali kako drugače).



Slika 37

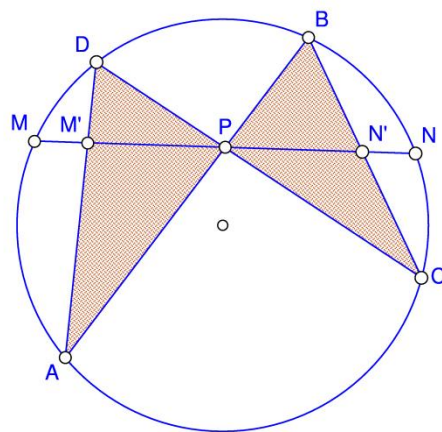
G33. Izrek o metulju



1. **Izrek o metulju.** Skozi točko P znotraj krožnice potekajo tri tetive: MN , AB in CD . Premica MN naj seka tetivi AD in BC v točkah M' oz. N' . Če je P razpolovišče tetive MN , potem je P tudi razpolovišče daljice $M'N'$. (Slika 38)
Dokažite izrek o metulju.



2. Preverite, ali velja metuljev izrek tudi če namesto v krog včrtamo metulja v elipso ali v par sekajočih se premic.



Slika 38

G34 Izotomična konjugacija



1. Dan je referenčni trikotnik ABC in točka P . Naj bo A_1 presečišče premice AA_1 in nosilke stranice BC . Točko A_1 prezrcalimo preko razpolovišča A' stranice BC v točko A_2 . Točke $B_1, B', B_2, C_1, C', C_2$ konstruiramo ciklično. (Slika 39)

Dokažite, da se premice AA_2, BB_2, CC_2 sekajo v skupni točki P' . Točko P' imenujemo **izotomična konjugacija** točke P .



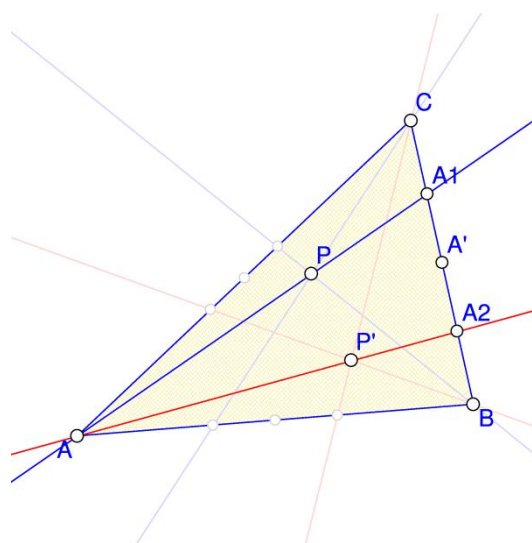
2. Obravnavajte osnovne lastnosti izotomične konjugacije kot preslikave (definiranost, slike posameznih delov ravnine, kot jih določa trikotnik, negibne točke).

Raziščite, ali izotomična konjugacija preslika premice v premice, krožnice v krožnice, stožnice v stožnice.

Konstruirajte množico točk, za katere ne obstaja izotomična konjugacija (oz. je na premici v neskončnosti).



3. Ugotovite, katera znamenita točka je izotomična konjugacija Gergonrove točke. Ugotovitev dokažite.



Slika 39

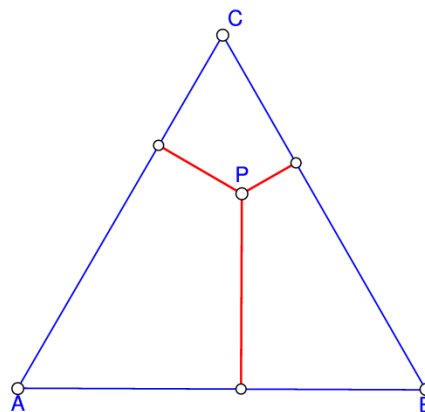
G35 Vivianijev izrek

- 

1. Vivianijev izrek. V enakostraničnem trikotniku je vsota oddaljenosti točke v notranjosti trikotnika do stranic trikotnika enaka dolžini višine trikotnika (in je zato neodvisna od točke) (Slika 40). Dokažite Vivianijev izrek na vsaj tri bistveno različne načine.
- 

2. Preoblikujte Vivianijev izrek tako, da bo veljal tudi za točke v zunanosti enakostraničnega trikotnika.
- 

3. Poiščite točko v raznostraničnem trikotniku, za katero je vsota oddaljenosti do nosilk stranic trikotnika najmanjša.



Slika 40